Solution Challenge Question 2

Mouctar Diallo pour mouctar.org et l'institut-delbol.com

September 29, 2018

SOLUTION TRAPEZE

1. SOLUTION: METHODE PAR TRIGONOMETRIE

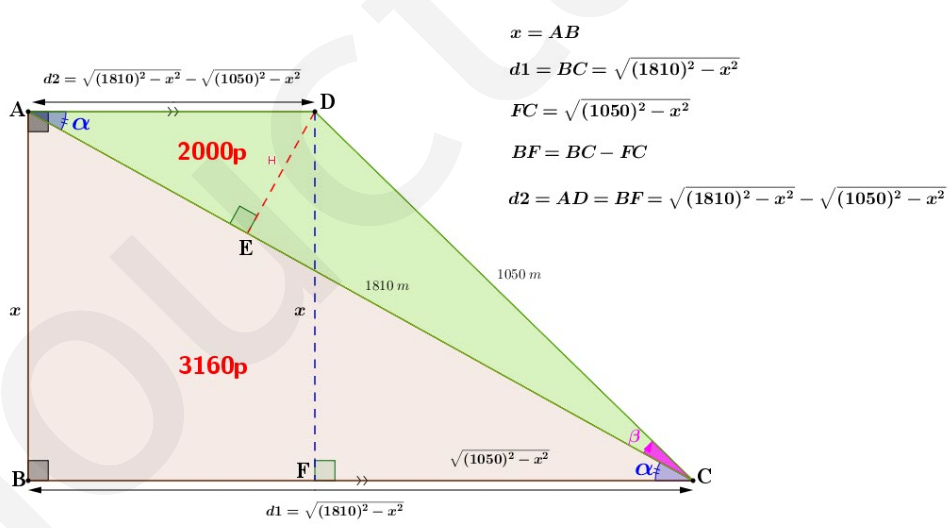

Figure 1: Trapeze 1.

Soit $AB = x$

Soit aussi $BC = d_1$

Du triangle rectangle $\triangle ABC$ nous avons l'hypothenuse $AC = 1810$.

Nous avons:

$d_1 = \sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Nous avons un autre triangle rectangle $\triangle DFC$

$FC = \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Une autre égalité :

$AD = d_2 = BF = BC - FC$

Nous pouvons ainsi écrire :

$d_2 = \sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

On peut aussi voir :

$\angle BCA \cong \angle CAD$

$m\angle BCA = \alpha = m\angle CAD$

Laire $\mathcal{A}$ $\triangle ABC$ va contenir les 3160 parcelles:

$\mathcal{A}\ \triangle ABC = 3160p$

Aussi

$\mathcal{A}\ \triangle ACD = 2000p$

En utilisant les formules de calcul des triangles en function de deux *côtés* et de l'angle compris:

Pour le $\triangle ABC$:

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin \alpha = 3160p \tag{1}$$

Pour le $\triangle ACD$:

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin\alpha = 2000p \qquad (2)$$

Divisons (1) par (2)

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin\alpha} = \frac{3160p}{2000p}$$

En simplifiant nous obtenons:

$\frac{BC}{AD} = \frac{3.16}{2}$

Ou bien:

$\frac{BC}{AD} = 1.58$

Mais $d_1 = BC$ et $d_2 = AD$

Ce qui donne:

$$\frac{\sqrt{(1810)^2 - x^2}}{\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2}} = 1.58$$

Multiplions les deux membres par le *dénominator* du premier membre:

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = 1.58(\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2})$

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = 1.58(\sqrt{(1810)^2 - x^2}) - 1.58(\sqrt{(1050)^2 - x^2})$

$(1.58 - 1)\sqrt{(1810)^2 - x^2} = 1.58\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

$0.58\sqrt{(1810)^2 - x^2} = 1.58\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = \frac{1.58}{0.58}\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = \frac{0.79}{0.29}\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Soit $k = \frac{0.79}{0.29}$

Nous obtenons:

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = k\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Elevons les deux membres au carré :

$(1810)^2 - x^2 = k^2((1050)^2 - x^2)$

$(1810)^2 - x^2 = k^2(1050)^2 - k^2x^2$

$(k^2-1)x^2 = k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2$

$x^2 = \frac{k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{k^2-1}$

$x = \sqrt{\frac{k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{k^2-1}}$

On remplace les données par leur valeur :

$$x = \sqrt{\frac{(\frac{0.79}{0.29})^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{(\frac{0.79}{0.29})^2 - 1}}$$

$x = 874.0605963$

On arrondit:

$\boxed{x = 874\ m}$

Trouvons les angles α et β

$\sin\alpha = \frac{x}{1810}$

Ce qui donne:

$\sin\alpha = \frac{874.0605963}{1810} \Leftarrow \alpha = 28^\circ.8753967$

Dun autre côté, dans le triangle$\triangle ADC$:

$$\frac{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}{1810} = \frac{\sin\alpha}{1050} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1810} = \frac{\sin\alpha}{1050}$$

Ce qui donne:

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1810}{1050}\sin\alpha$

Ou bien

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1810}{1050}\sin 28^\circ.8753967 \Leftarrow (\alpha+\beta) = 56^\circ.35006873$$

Nous aurons alors:

$\beta = 56^\circ.35006873 - 28^\circ.8753967$

$\beta = 27^\circ.47467203$

L'aire des triangles:

L'aire $\mathcal{A}\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot AC \cdot \cos\alpha$

L'aire $\mathcal{A}\ \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 874.0605963 \times 1810 \times \cos 28^\circ.8753967$

L'aire $\mathcal{A}\ \triangle ABC = 692678.2811$

En arrondissant:

$\boxed{\text{L'aire } \mathcal{A}\ \triangle ABC = 692678\ m^2}$

For $\triangle ADC$

L'Aire $\mathcal{A}\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 1050 \cdot 1810 \cdot \sin\beta$

Ou bien:

L'Aire $\mathcal{A}\triangle ADC = \dfrac{1}{2} \cdot 1050 \cdot 1810 \cdot \sin 27^\circ.47467203$

L'Aire $\mathcal{A}\triangle ADC = 438403.9754$

En arrondissant:

$\boxed{\text{L'Aire } \mathcal{A}\triangle ADC = 438404\ m^2}$

AIRE SURFACE TOTALE :

Nous faisons la somme des deux surfaces

$\mathcal{A}\ \square ABCD = 692678 + 438404$

$\boxed{\mathcal{A}\ \square ABCD = 1131082\ m^2}$

$\mathcal{A}$ *SURFACE D'UNE PARCELLE* : 5160 *parcelles au total*

Aire Parcelle $= \frac{1131082}{5160}$

$\boxed{\mathcal{A}\ \textit{SURFACE D'UNE PARCELLE} := 219\ m^2}$

Formule de Heron pour le $\triangle ADC$

Calculons d_2

$$\frac{\sin\alpha}{1050} = \frac{\sin\beta}{d_2} \Rightarrow d_2 = 1050 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$d_2 = 1050 \cdot \dfrac{\sin 27^\circ.47467203}{\sin 28^\circ.8753967}$

$d_2 = 1003.143208$

Les ctés : $1050, 1810, 1003.143208$

Calculons s:

$s = \frac{1050+1810+1003.143208}{2}$

$s = 1931.571604$

$s - 1050 = 1931.571604 - 1050 = 881.571604$

$s - 1810 = 1931.571604 - 1810 = 121.571604$

$s - 1003.143208 = 1931.571604 - 1003.143208 = 928.428396$

L'aire $\mathcal{A} \ \triangle ADC = \sqrt{1931.571604 \times 881.571604 \times 121.571604 \times 928.428396}$

L'aire $\mathcal{A} \ \triangle ADC = 438403.9751$

En arrondissant:

$\boxed{\text{L'aire } \mathcal{A} \triangle ADC = 438404 \ m^2}$

2. SOLUTION: METHODE ALGEBRIQUE

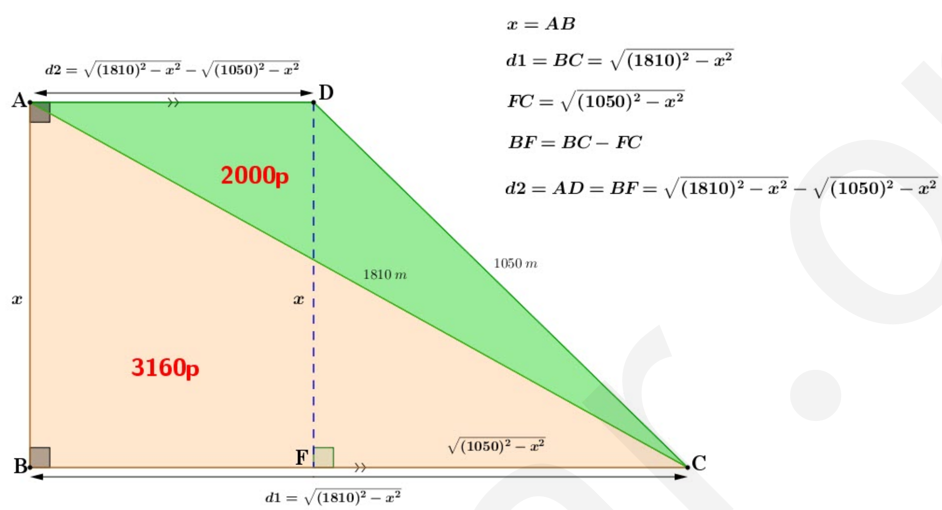

Figure 2: Trapezoid2.

Soit $AB = x$

Soit aussi $BC = d_1$

Pour le triangle rectangle $\triangle ABC$ nous avons lhypothenuse $AC = 1810$.

Nous avons:

$d_1 = \sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Nous avons aussi le triangle rectangle $\triangle DFC$

$FC = \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Une autre égalité :

$AD = d_2 = BF = BC - FC$

Nous pouvons aussi écrire :

$d_2 = \sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Laire de la surface $\mathcal{A}\triangle ABC$ doit contenir 3160 parcelles sur 5160.

Pour $\triangle ABC$:

$\mathcal{A}\triangle ABC$

Laire de la surface $\mathcal{A}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot BC$

OU BIEN

$\mathcal{A}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot d_1$

$\mathcal{A}\triangle ABC = \frac{1}{2}x\sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Maintenant cherchons la surface totale:

$\mathcal{A}\ \square ABCD = \square ABFD + \triangle DFC$

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \square ABFD$:

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \square ABFD = x \cdot d_2$

On remplace:

$\mathcal{A}\ \square ABFD = x \cdot (\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2})$

$\mathcal{A}\ \square ABFD = x\sqrt{(1810)^2 - x^2} - x\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Pour le $\triangle DFC$:

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \triangle DFC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot FC$

OU BIEN

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \triangle DFC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot d_1$

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \triangle DFC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

SURFACE TOTALE :

L'aire de la surface $\mathcal{A}\ \square ABCD = \square ABFD + \triangle DFC$

On remplace:

L'aire de la surface $\mathcal{A} \square ABCD = x\sqrt{(1810)^2 - x^2} - x\sqrt{(1050)^2 - x^2} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

L'aire de la surface $\mathcal{A} \square ABCD = x\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \frac{1}{2}x\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Comparons les aires:

L'aire du $\triangle ABC = 3160p$

L'aire du $\square ABCD = 5160p$

Ce qui donne:

$\frac{Area \square ABCD}{Area \triangle ABC} = \frac{5160p}{3160p}$

Ou bien:

$\mathcal{A} \triangle ABC = \frac{3160p}{5160p} Area \square ABCD$

On simplifie:

$\mathcal{A} \triangle ABC = \frac{79}{129} Area \square ABCD$

En remplaçant :

$\dfrac{1}{2}x\sqrt{(1810)^2 - x^2} = \dfrac{79}{129}(x\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{(1050)^2 - x^2})$

Nous pouvons écrire :

$\dfrac{129}{158}x\sqrt{(1810)^2 - x^2} = x\sqrt{(1810)^2 - x^2} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Divisons les deux membres par x

$\dfrac{129}{158}\sqrt{(1810)^2 - x^2} = \sqrt{(1810)^2 - x^2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

On arrange:

$\frac{1}{2}\sqrt{(1050)^2 - x^2} = (1 - \frac{129}{158})\sqrt{(1810)^2 - x^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{(1050)^2 - x^2} = \frac{29}{158}\sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Multiplions les deux membres par 2:

$\sqrt{(1050)^2 - x^2} = \frac{29}{79}\sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Nous pouvons aussi écrire :

$\frac{0.79}{0.29}\sqrt{(1050)^2 - x^2} = \sqrt{(1810)^2 - x^2}$

Soit $k = \frac{0.79}{0.29}$

Nous avons:

$\sqrt{(1810)^2 - x^2} = k\sqrt{(1050)^2 - x^2}$

Elevons les 2 membres au carré :

$(1810)^2 - x^2 = k^2((1050)^2 - x^2)$

$(1810)^2 - x^2 = k^2(1050)^2 - k^2x^2$

$(k^2 - 1)x^2 = k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2$

$x^2 = \frac{k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{k^2 - 1}$

$x = \sqrt{\frac{k^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{k^2 - 1}}$

Remplaons les données par leurs valeurs :

$x = \sqrt{\frac{(\frac{0.79}{0.29})^2 \cdot (1050)^2 - (1810)^2}{(\frac{0.79}{0.29})^2 - 1}}$

$x = 874.0605963$

On arrondit:

$\boxed{x = 874\ m}$

SURFACES:

Les autres côtés :

$d_1 = \sqrt{(1810)^2 - x^2}$

$d_1 = \sqrt{(1810)^2 - (874.0605963)^2}$

$d_1 = 1584.966269$

$\boxed{d_1 = 1585\ m}$

$d_2 = \sqrt{(1810)^2 - x^2} - \sqrt{(1050)^2 - x^2}$

$d_2 = \sqrt{(1810)^2 - (874.0605963)^2} - \sqrt{(1050)^2 - (874.0605963)^2}$

$d_2 = 1003.143208$

$\boxed{d_2 = 1003\ m}$

L'aire du $\triangle ABC = \frac{1}{2}x \cdot d_1$

L'aire du $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 874.0605963 \times 1584.966269$

L'aire du $\triangle ABC = 692678.2811$

En arrondissant:

$\boxed{\mathcal{A}\ \triangle ABC = 692678\ m^2}$

SURFACE TOTALE :

Le trapèze :

$\mathcal{A}\ \square ABCD = \frac{d_1+d_2}{2} \cdot x$

$$\mathcal{A}\ \square ABCD = \frac{1584.966269 + 1003.143208}{2} \times 874.0605963$$

$\mathcal{A}\ \square ABCD = 1131082.256$

$\boxed{\mathcal{A}\ ABCD = 1131082\ m^2}$

AIRE DUNE PARCELLE : 5160 *PARCELLES*

$\mathcal{A}parcelle = \frac{1131082}{5160}$

$\boxed{\mathcal{A}Parcelle = 219\ m^2}$

Formule de Heron pour le $\triangle ADC$

Calculons d_2

$$\frac{\sin\alpha}{1050} = \frac{\sin\beta}{d_2} \Rightarrow d_2 = 1050 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$d_2 = 1050 \cdot \frac{\sin 27°.47467203}{\sin 28°.8753967}$

$d_2 = 1003.143208$

Les côtés : $1050, 1810, 1003.143208$

Calculons s:

$s = \frac{1050+1810+1003.143208}{2}$

$s = 1931.571604$

$s - 1050 = 1931.571604 - 1050 = 881.571604$

$s - 1810 = 1931.571604 - 1810 = 121.571604$

$s - 1003.143208 = 1931.571604 - 1003.143208 = 928.428396$

L'aire $\mathcal{A}\triangle ADC = \sqrt{1931.571604 \times 881.571604 \times 121.571604 \times 928.428396}$

L'aire $\mathcal{A}\triangle ADC = 438403.9751$

En arrondissant:

$\boxed{\text{L'aire } \mathcal{A}\triangle ADC = 438404\ m^2}$

FIN******************************